TD$_{19}$ – Coniques

Exercice 1 ★★★

On considère un point M qui décrit la parabole $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 = 2py$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Quelle est l'enveloppe Γ de la famille des droites (IH) où I est le milieu de $[OM]$ et H le projeté orthogonal de M sur (Ox) ?
2. Tracer sur une même figure Γ et $\mathcal{C}$.

Exercice 2 ★★

Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 + x = 1$ et l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

Pour tout $m \neq 0$, la droite variable Δ_m d'équation $y = m(1-x)$ passant par A recoupe la parabole en un point $M \neq A$ et l'ellipse en un point $N \neq A$.

1. Donner les coordonnées de M et N.
2. Donner une équation de la tangente en M à la parabole $\mathcal{P}$ et une équation de la tangente en N à l'ellipse $\mathcal{E}$.
3. Déterminer le lieu des points d'intersection I de ces deux tangentes quand m décrit $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 Hyperbole équilatère ★★

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'excentricité d'une hyperbole pour que ses deux asymptotes soient orthogonales. On dit alors que l'hyperbole est équilatère

Exercice 4 ★★★

Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole du plan $\mathscr{P}$. On considère un point M de $\mathscr{H}$ et on note H et H' ses projetés orthogonaux respectifs sur les asymptotes de $\mathscr{H}$. Montrer que le produit $MH \times MH'$ ne dépend pas du choix du point M.

Exercice 5 ★★

Soient A et B deux points distincts du plan et soit I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $MI^2 = MA \times MB$.

Exercice 6 Définition bifocale d'une ellipse ★★★

Soit F_1 et F_2 deux points distincts du plan. On considère un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $MF_1 + MF_2 = 2a$.

1. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a < F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a = F_1F_2$.
3. On suppose que $2a > F_1F_2$.
   (a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une ellipse dont les deux foyers sont F_1 et F_2.
   (b) Montrer que si l'application $f : I \to \mathscr{P}$, notée $f : t \mapsto M(t)$, est une paramétrisation de l'ellipse $\mathscr{C}$, alors on a
   $$\forall t \in I, \quad \left\langle f'(t), \frac{\overrightarrow{F_1M(t)}}{F_1M(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2M(t)}}{F_2M(t)} \right\rangle = 0.$$
   (c) Comment se réfléchit sur l'ellipse un rayon lumineux passant par F_1 ?

Exercice 7 Définition bifocale d'une hyperbole ★★★

Soient F_1 et F_2 deux points distincts du plan. On considère un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathscr{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathscr{P}$ tels que $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

1. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a > F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathscr{C}$ si $2a = F_1F_2$.

3. Montrer que si $2a < F_1F_2$, alors l'ensemble $\mathscr{C}$ est une hyperbole dont les deux foyers sont F_1 et F_2.

Exercice 8 Propriété optique de la parabole ★★★

Soit $\mathscr{C}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathscr{D}$.

1. Montrer que pour tout point M_0 de $\mathscr{C}$, la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 est la médiatrice du segment $[FH_0]$ où H_0 est le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathscr{D}$.
2. En déduire que la droite normale à la parabole $\mathscr{C}$ au point M_0 est la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$.
3. Comment se réfléchit un rayon lumineux se dirigeant sur la parabole dans une direction parallèle à l'axe focal ?

Exercice 9 ★★

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la nature géométrique et préciser les éventuelles symétries des coniques suivantes.

(i) $4x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$,
(ii) $27x^2 - 6y^2 + 18x - 64y - 12 = 0$,
(iii) $x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$,
(iv) $xy + 3x + 5y - 4 = 0$.
(v) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y = 0$,
(vi) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$,
(vii) $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$,
(viii) $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$,
(ix) $3x^2 + \sqrt{3}xy - 2y^2 + 14y - 4 = 0$,
(x) $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y = 0$.

Exercice 10 ★★

Soit $m \in \mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}_m$ d'équation

$$x^2 + y^2 + 2mxy = 1$$

Exercice 11 ★★

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la conique $\mathscr{C}$ d'équation

$$x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + y - 2 = 0.$$

1. Déterminer la nature de la conique $\mathscr{C}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une tangente au point $(1, 1)$ et préciser une équation de cette dernière.

Exercice 12 ★★

Discuter selon la valeur du réel λ la nature et les éléments caractéristiques de la courbe plane dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé du plan est

$$(1+\lambda)(x^2+y^2) + 2(1-\lambda)xy - 4\lambda y + \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Exercice 13 ★★★

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 3 .

1. Montrer que l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation $P(x) = P(y)$ est la réunion d'une droite et d'une conique $\mathscr{C}$.
2. Montrer que la conique $\mathscr{C}$ est bornée.

Exercices issus d'oraux

Exercice 14 ★★

(Oral 2023)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Étudier et dessiner la courbe d'équation $\dfrac{5}{2}(x^2+y^2) - 3xy + \sqrt{2}(x+y) = 0$

Exercice 15 ★★★

(Oral 2010)

Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ et I un point quelconque du plan.

1. Déterminer le nombre de tangentes à (P) passant par I.
2. Déterminer le lieu des points I par lesquels passent deux tangentes à (P) orthogonales.

Exercice 16 ★★★

(Oral 2010)

Soit (Γ) l'hyperbole d'équation $xy = k$, $(k > 0)$ et A, B et C trois points de Γ Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC est aussi sur (Γ).

Exercice 17 ★★★

(Oral 2016)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$ et $N(2, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Soit M le point d'intersection de la perpendiculaire en A à (AN) et de la droite $(A'N)$.

1. Trouver les coordonnées de M en fonction de t.
2. Étudier la courbe C, ensemble des points M.
3. Montrer que C est une ellipse privée d'un point.

Exercice 18 ★★

(Oral 2019)

Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $Z = iz^2 + 2(6-2i)z + 18 + 8i$.

1. Trouver les complexes z tels que $Z = 0$.
2. On considère l'ensemble (C_r) des points d'affixes z tels que $\mathrm{Re}(Z) = 0$. Caractériser et tracer cet ensemble.
3. On considère l'ensemble (C_i) des points d'affixes z tels que $\mathrm{Im}(Z) = 0$.
4. Déterminer l'intersection de ces deux ensembles.